ルディクスに対する構文論的考察 (証明論と証明活動)

西牟田, 祐樹

数理解析研究所講究録
第2083巻 2018年 38-44

ルディクスに対する構文論的考察

慶應義塾大学文学研究科 西牟田祐樹 *
Yuki Nishimuta
Graduate School of Letters,
Keio University

Abstract

本稿では(Girard, 2001)が導入したルディクスの体系に対応する統合的論理結合子を用いたシーケント計算には両立しない二つの定式化が用いられていることを明らかにし,その解決策を与える.

1 序論

線形論理の創始者ジラールは(Girard, 2001)で相互作用によって伝統的な構文論と意味論の区別を説明するルディクスという理論を導入した.ルディクスにおける計算は正規化というカット除去による対話的な証明探索であるが,この対話的な計算を実現するために(Andreoli, 1992)の焦点化と極性というアイデアが用いられている.ジラールはこれらのアイデアをさらに発展させ,同じ極性を持つ乗法加法的線形論理の二項の論理結合子の組み合わせを一つの論理結合子と見なした統合的論理結合子という新たな論理結合子を導入した (Girard, 1999; 2001). 本稿ではジラールがルディクスの推論規則を説明するために用いたシーケント計算[2]とそこで用いられている二つの定式化には不整合があることを明らかにし,その解決策を与える.二つの定式化とは次のものである. (1) ルディクスのシーケント計算は焦点化を行うために後件は任意個の論理式を許し,前件は論理式を高々一つに制限したシーケントを用いている (Girard, 2001, p.309). (2) 統合的論理結合子の推論規則は二項の論理結合子の組み合わせによって得られた論理式をボトムアップに分解して得られるシーケントによって定義される (Girard, 1999, p.271)[3]. この二つの定式化には論理式をボトムアップに分解する過程でテンソル規則を適用すると,左辺に複数の論理式

[1]本研究は慶應義塾大学博士課程学生支援プログラムと京都大学解析研究所の助成を受けたものである.

が現れることになるが, 前件の論理式を一つに制限した体系ではこのようなシーケントは用いることができないという不整合がある. ジラールはこの問題を回避するためにド・モルガン双対な二つの論理式を同一視している(Girard, 2001, p.307). しかし, 前件の論理式を一つに制限したシーケントを用いると直観主義論理と同様にド・モルガン双対性は成り立たないのでジラールの方法によっては不整合を取り除くことができない. この不整合を取り除くために二項の論理結合子を用いずに統合的論理結合子の推論規則を得る方法を与える, またはルディクスのシーケント計算で用いるシーケントを変更するといった方法が考えられる. 本稿ではシーケントを変更することで不整合を解消する.

2 ルディクスに対応するシーケント計算の不整合とその解決

本稿では線形論理と焦点化に関する知識を仮定する (cf. [3, 5, 1]).

乗法加法的線形論理MALLの論理結合子とその推論規則は正と負の二種類に分類される. $\otimes$と$\oplus$は正の論理結合子であり, &と$\parr$は負の論理結合子である. 正と負の区別は証明探索における推論規則の持つ性質に基づいている. 負の規則は規則をボトムアップに見た時に選択は行われず, 可逆な規則である. それゆえ負の規則は証明探索において決定的(deterministic)な計算である. それに対して正の規則は選択を必要とし, 非可逆な規則である. それゆえ正の規則は証明探索において非決定的(non-deterministic)な計算である. 例えばボトムアップに見た時 $\otimes$ 規則はコンテクストをどのように二つのシーケントに振り分けるかという選択を必要とし, $\oplus$ 規則は $A \oplus B$ から二つの論理式 AとBのどちらを捨てるかという選択が必要である. 推論規則の正負はその主論理式の正負によって定められる.

統合的論理結合子(の推論規則)は同じ極性を持つメタ変数に同じ極性を持つ $n > 0$ 個の論理結合子を組み合わせて得られる論理式Aを含むシー

---

[2]ジラールはルディクスの説明のために主に推論規則についてだけ述べておりシーケント計算の体系についての正確な記述はない. 体系を特定することは本稿の目的には必要ではないので議論に必要な説明だけを与え, 単にルディクスのシーケント計算などと呼ぶことにする. (Girard, 2011)で述べられている体系HCでは(表面的には)異なる統合的論理結合子の定義が用いられている. (Girard, 2011)の統合的論理結合子の定義には自然数の分割 (partition)が用いられているが, どのように具体的な推論規則を構成するかについては述べられていない. さらに否定の論理結合子も統合的論理結合子に含めている点で(Girard, 2001)の説明と異なる.

[3](Girard, 1999)では明示的に統合的論理結合子の定義を与えているのに対し, (Girard,2001)は具体例によって統合的論理結合子を説明しており, 明示的な定義は与えられていない. しかし, (Girard, 2001, p.307)での統合的論理結合子の説明は二項結合子の組み合わせによってなされており, (Girard,1999)の定義と本質的に同じものである.

ケントを二項の論理結合子によってボトムアップに分解することで得られる. 例えば図1の分解によって図2の統合的論理結合子が得られる.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash P,R,\Gamma}{\sim P,\sim R\vdash\Gamma}\qquad\dfrac{\vdash Q,R,\Gamma}{\sim Q,\sim R\vdash\Gamma}}{(\sim P\oplus\sim Q),\sim R\vdash\Gamma}}{(\sim P\oplus\sim Q)\otimes\sim R\vdash\Gamma}\ (\otimes\text{-left})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P\vdash\Gamma}{\vdash\Gamma,\sim P}}{\vdash\Gamma,\sim P\oplus\sim Q}\qquad\dfrac{R\vdash\Delta}{\vdash\Delta,\sim R}}{\vdash\Gamma,\Delta,(\sim P\oplus\sim Q)\otimes\sim R}$$

図 1: 二項の論理結合子による分解

$$\dfrac{\vdash P,R,\Gamma\qquad\vdash Q,R,\Gamma}{(\sim P\oplus\sim Q)\otimes\sim R\vdash\Gamma}$$

$$\dfrac{P\vdash\Gamma\qquad R\vdash\Delta}{\vdash\Gamma,\Delta,(\sim P\oplus\sim Q)\otimes\sim R}\qquad\dfrac{Q\vdash\Gamma\qquad R\vdash\Delta}{\vdash\Gamma,\Delta,(\sim P\oplus\sim Q)\otimes\sim R}$$

図 2: 統合的論理結合子の例

統合的論理結合子は二項の論理結合子の推論規則による分解を利用して定義されているが, この分解の操作をどのような論理体系上で行っているのかということが(Girard, 1999; 2001)では明確にされていなかった. 統合的論理結合子を構成する際にどのような体系上で考えるかによって推論規則のコンテクストが変化し, さらに二項の論理結合子の組み合わせによって定義される論理式は体系ごとに異なるのでこの点を明らかにすることは重要である. 分解の操作は一般には乗法加法的線形論理 MALL (様相演算子を含む場合は乗法指数的線形論理 MELL上 (cf. [2]))で定義されていると考えられる. なぜならMALLは乗法的論理結合子と加法的論理結合子を含む最小の体系だからである. しかしルディクスのシーケント計算はMALLとは異なるシーケントの定義を用いている. ルディクスでは正と負の推論規則が証明探索において交互に現れるという仕組みを利用して

対話的な計算を実現している．そのためには統合的論理結合子のアイデアを用いるならば正の規則において主論理式が一つ焦点化されている必要がある．ジラールはシーケントの前件を高々一つに制限することによって焦点化を可能にしている (Girard, 2001, p. 306).

ルディクスのデザイン(designs)という概念と推論規則を説明する際にジラールは統合的論理結合子の規則を具体例 (図 2)によって説明し，推論規則の論理式をその位置(loci)というものに置き換えることよってルディクスの推論規則の具体例(図 3)を提示している．

$$\frac{\vdash \Gamma, \xi 3, \xi 7 \qquad \vdash \Gamma, \xi 4, \xi 7}{\xi \vdash \Gamma}\,(\xi \vdash \{\{3,7\},\{4,7\}\})$$

$$\frac{\xi 3 \vdash \Gamma \qquad \xi 7 \vdash \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta, \xi}\,(\vdash \xi, \{3,7\}) \quad \frac{\xi 4 \vdash \Gamma \qquad \xi 7 \vdash \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta, \xi}\,(\vdash \xi, \{4,7\})$$

図 3: ルディクスの推論規則の例

(Girard, 2001, p.307)の記述よりジラールは MALL ではなくシーケントの前件が制限された体系上で分解を考えていることが分かる．しかし，図4の論理式 $(\sim P \oplus \sim Q) \otimes \sim R$ は左規則を構成する際にボトムアップな分解を行うと$\otimes$左規則を分解する時に左辺に論理式が複数個現れるという問題が生じる (cf. 図1)．ジラールは「左規則は$\invamp$規則，&規則と否定を組み合わせることによって得られる」 (Girard, 2001, p.307, 引用者訳)と述べていることから図4で等号(同値関係) $(\sim P \oplus \sim Q) \otimes \sim R = \sim((P \& Q) \invamp R)$ を利用していることが分かる．しかしこのド・モルガン則は前件の論理式を一つに制限した体系では証明することができない．よってジラールの方法によっては不整合を取り除くことはできない．この不整合を取り除くためには二項の論理結合子を用いずに統合的論理結合子の推論規則を得る方法を与える，またはルディクスの体系で用いるシーケントを変更するといった方法が考えられる．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdash \Gamma, P, R \qquad \vdash \Gamma, Q, R}{\vdash \Gamma, P \& Q, R}}{\vdash \Gamma, (P \& Q) \parr R}}{(\sim P \oplus \sim Q) \otimes \sim R \vdash \Gamma} \; (\sim\text{-right})$$

図 4: ド・モルガン則による同一視

本稿では用いるシーケントを変更することで問題を解決する. 我々は両側を用いるシーケント $A \vdash \Gamma$ から片側のみを用いるシーケント (one-sided sequent) $\vdash \Gamma$ にシーケントの定義を変更する. シーケントの前件に論理式が高々一つしか現れないという条件は片側シーケントでは $\vdash \Gamma$ において Γ には高々一つの負の論理式しか現れないという条件である (cf. 図5). 片側シーケントでは論理結合子を含む論理式の否定はド・モルガン双対に対する等号によって定義される (e.g. $\sim(A \otimes B) = \sim A \parr \sim B$). よって, 片側シーケントを用いることによりド・モルガン則が自由に使えるので不整合を解消することができる.

負の規則

$$\frac{\vdash \Gamma, P, R \qquad \vdash \Gamma, Q, R}{\vdash \Gamma, (P \& Q) \parr R} \; (\beta, \{\{P, R\}, \{Q, R\}\})$$

ここでΓは正の論理式のみから成る多重集合で変数P, Q, Rは正の論理式を表す.

正の規則

$$\frac{\vdash \Gamma, L \qquad \vdash \Delta, N}{\vdash \Gamma, \Delta, (L \oplus M) \otimes N} \; (\alpha, \{L, N\}) \quad \frac{\vdash \Gamma, M \qquad \vdash \Delta, N}{\vdash \Gamma, \Delta, (L \oplus M) \otimes N} \; (\alpha, \{M, N\})$$

ここで変数L, M, Nは負の論理式を表す.

図 5: 片側シーケントを用いた統合的論理結合子

3 まとめ

本稿ではシーケントを前件と後件の両側を用いるシーケントから片側のみを用いるシーケントに変更することによって(Girard, 2001)のシーケント計算が持つ不整合を取り除いた. それではルディクスも片側のみを用いたシーケントによって定式化すべきだろうか. ルディクスでは論理式 A の代わりに位置 ξ が用いられている. ルディクスのカット(または正規化)は異なるシーケントにおいて前件と後件が共通する位置を含む時に定義されている (Girard, 2001, p.322). 片側シーケントでのカットは A と $\sim A$ の間で行われるのだが, 位置 ξ の双対 $\sim\xi$ とは一体なんであろうか. 片側シーケントでは論理結合子を含む論理式の否定はド・モルガン双対に対する等号によって定義され, 否定は最終的に原子論理式にしか付かず始式 $\vdash P, \sim P$ (ここでPは原子論理式)によって導入されることになる. これに対しルディクスは相互作用によって双対を定義する理論であり, 始式を初めから仮定しない (さらに始式は任意回 η 拡張可能である (Girard, 2001, pp. 307-308)). これらのことより両側シーケントを用いることはルディクスにとって本質的であり, ルディクスは片側シーケントによって定式化されるべきではない. それゆえ, ルディクスの推論規則をシーケント計算を用いて説明するためにはシーケント計算には両側シーケントが用いられるべきである. 二項の論理結合子を用いずに統合的論理結合子の推論規則を得る方法を見出すというより好ましい不整合の解消については別稿に譲る.

参考文献

[1] J.-M. Andreoli, *Logic programming with focusing proofs in linear logic*, Journal of Logic and Computation, vol. 2, no. 3, pp. 297-347, 1992.

[2] M. Basaldella and C. Faggian, *Ludics with repetitions (exponentials, interactive types and completeness)*, Logical methods in Computer Science, vol. 7 Issue 2, pp.1-85, 2011.

[3] J.-Y. Girard, *Linear Logic*, Theoretical Computer Science, vol. 50, 1987, pp.1-102.

[4] J.-Y. Girard, *A new constructive logic: classic logic*, Mathematical Structure in Computer Science, vol. 1, Issue 3, pp. 255-296, 1991.

[5] J.-Y. Girard, *On the meaning of logical connectives I: syntax vs. semantics*, in Berger and Schwichtenberg (Eds), Computational logic, Springer, pp. 215-272, 1999.

[6] J.-Y. Girard, *Locus solum: From the rules of logic to the logic of rules*, Mathematical Structures in Computer Science, vol. 11, Issue 3, pp.301-506, 2001.

[7] J.-Y. Girard, *The blind spot: Lectures on logic*, European Mathematical Society, Zürich, Switzerland, 2011.